## Wiederholung


- Cheeger-Konstante: $h = \inf \frac{\mathrm{vol}\, S}{\min\{V(M_+), V(M_-)\}}$

- Cheeger-Ungleichung: $\lambda_1 \geq \frac{h^2}{4}$

## zum Beweis

$f$ nahe an Eigenfunktion, Morse-Funktion mit Null als regulärem Wert

$$S := f^{-1}(0)$$

$$M_+ := f^{-1}([0, f_{max}])$$

$$M_- := f^{-1}([f_{min}, 0])$$

zz: $\frac{\|df\|}{\|f\|} \geq \frac{h^2}{4}$ auf $M_+$

äquivalent: $\int_{M_+} |d f^2| \, v_g \geq h \int_{M_+} f^2 \, v_g$

dafür: Spezialfall der Ko-Area-Formel

(1) $$\int_{M_+} |d f^2| \, v_g = \int_0^{f_{max}^2} \mathrm{vol}\left(f^{-1}(\sqrt{t})\right) dt$$

(2) $$\int_{M_+} f^2 \, v_g = \int_0^{f_{max}^2} \mathrm{vol}\left(f^{-1}([\sqrt{t}, f_{max}])\right) dt$$

Integration über $M_+$:

$$\frac{\|df\|^2}{\|f\|^2} = \frac{\int |df|^2 v_g}{\int f^2 v_g} = \frac{\int f^2 v_g \cdot \int |df|^2 v_g}{(\int f^2 v_g)^2}$$

$$\geq \frac{(\int f \cdot |df| v_g)^2}{(\int f^2 v_g)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{\int |df^2| v_g}{\int f^2 v_g}\right)^2$$

Cauchy-Schwarz

und: $|df^2| = 2f|df|$

da $f = |f|$ auf $M_+$
$f \geq 0$!

zz: $\frac{\|df\|^2}{\|f\|^2} \geq \frac{h^2}{4}$

äquivalent: $\int_{M_+} |df^2| v_g \geq h \cdot \int_{M_+} f^2 v_g$

Beweis damit $\longrightarrow$

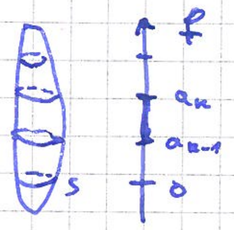
⇒ 3. Schritt

$p_1, \dots, p_r$ (isolierte) kritische Punkte von $f$ auf $M_+$

$a_i := f(p_i)$

$I'_k := (a_{k-1}, a_k)$

$M_k := f^{-1}(I'_k)$ $\quad k \geq 1$, $\quad a_0 := 0$




Morsetheorie: $M_k \cong I'_k \times L_k$ diffeomorph

$L_k := f^{-1}(\beta)$, $\quad \beta \in I'_k$

Variablentransformation: $I_k := (a_{k-1}^2, a_k^2)$

Diffeomorphismus $p : M_k \xrightarrow{\sim} I_k \times L_k$, $\quad \alpha := p^{-1}$

$\pi_1 \circ p = f^2$ $\quad \pi_1 : I_k \times L_k \to I_k$

d.h. $\pi_1 = f^2 \circ \alpha$

in $M_k$ gilt: $v_g|_{M_k} = dr \wedge \omega$

mit $dr = \frac{df}{|df|}$, $\quad \omega$ : Volumenform auf $L_k$ (Niveaufläche von $f$)

man beweist einen Spezialfall der Ko-Area-Formel:

$$\int_{M_+} |d f^2| \, v_g = \int_0^{f_{max}^2} \mathrm{vol}\left(f^{-1}(\sqrt{t})\right) dt$$

$$\int_{M_+} f^2 \, v_g = \int_0^{f_{max}^2} \mathrm{vol}\left(f^{-1}([\sqrt{t}, f_{max}])\right) dt$$

<u>Anwendung</u>:

$$\mathrm{vol}\left(f^{-1}([\sqrt{t}, f_{max}])\right) \leq \mathrm{vol}\, M_+ \leq \mathrm{vol}\, M_- \leq \mathrm{vol}\left(f^{-1}([f_{min}, \sqrt{t}])\right)$$

$$\mathrm{vol}\, f^{-1}(\sqrt{t}) \geq h \, \mathrm{vol}\, f^{-1}([\sqrt{t}, f_{max}])$$

nach Definition von $h$

$\sqrt{t}$ regulärer Wert (liegen dicht nach Sard)

$$\Rightarrow \int_{M_+} |d f^2| \, v_g \geq h \int_{M_+} f^2 \, v_g$$

<u>Lemma:</u> Sei $\alpha$ der Diffeomorphismus $\alpha: I_k \times L_k \to M_k$, dann gilt.

$$\alpha^* dr = \frac{\pi_1^* dt}{|df^2|} \qquad \pi_1: I_k \times L_k \to I_k$$

<u>Beweis:</u> $(f^2)^* dt = df^2 \qquad f^2: M_k \to \underset{dt}{I_k}$

$$\Rightarrow \pi_1^* dt = (f^2 \circ \alpha)^* dt = \alpha^* \circ (f^2)^* dt$$
$$= \alpha^* df^2 = 2f \, \alpha^* df$$

$$(|df^2| = 2f\,|df|)$$

$$\Rightarrow \frac{\pi_1^* dt}{|df^2|} = \alpha^* \left(\frac{df}{|df|}\right) = \alpha^* dr$$

$$\mathcal{J}_k := \int_{M_k} |df^2| \, v_g \qquad \alpha: I_k \times L_k \xrightarrow{\sim} M_k$$

$$= \int_{I_k \times L_k} \alpha^* (|df^2| v_g) \qquad v_g = dr \wedge \omega \quad \text{auf } M_k$$

$$= \int_{I_k \times L_k} |df^2| (\alpha^* dr) \wedge \alpha^* \omega$$

Transformationsformel und Satz von Fubini

$$= \int_{I_k \times L_k} \pi_1^* dt \wedge \alpha^* \omega$$

$$= \int_{I_k} \left( \int_{t \times L_k} \alpha^* \omega \right) dt$$

$$= \int_{I_k} A(t)\, dt, \qquad A(t) := vol(f^{-1}(\sqrt{t})) = \int_{\alpha(t \times L_k)} \omega$$

$$\Rightarrow \int_{M_+} |df^2| v_g = \sum_{k=0}^{r} \mathcal{J}_k = \int_0^{f_{max}^2} vol(f^{-1}(\sqrt{t}))\, dt$$

## 4. Schritt

siehe S. 3'

$$V(t) := \mathrm{vol}\left(f^{-1}([\sqrt{t}, f_{max}])\right)$$

partielle Integration:

$$J_k' := \int_{I_k} V(t)\,dt = t\,V(t)\Big|_{\partial I_k} - \int_{I_k} t \cdot \frac{d}{dt} V(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \int_0^{f_{max}^2} V(t)\,dt = \sum_{k=0}^{r} J_k' = -\sum_{k=0}^{r} \int_{I_k} t \frac{d}{dt} V(t)\,dt$$

da:
- mittleren Randterme heben sich weg
- unteres Ende: $t = 0$
- oberes Ende: $V(t) = 0$

- $$V(t) = \int_{(t, a_k) \times L_k} (\alpha^* dr) \wedge (\alpha^* \omega) + \sum_{i=1}^{r-k} \int_{I_{k+i} \times L_{k+i}} (\alpha^* dr) \wedge (\alpha^* \omega)$$

$t \in I_k$!

$$= \int_{(t, a_k)} \left( \int_{L_k} \alpha^* \omega \right) \frac{ds}{|df^2|} + \sum_{i=1}^{r-k} \int_{I_{k+i}} \left( \int_{L_{k+i}} \alpha^* \omega \right) \frac{ds}{|df^2|}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} V(t) = - \int_{L_k} \frac{\alpha^* \omega}{|df^2|}$$

$$\Rightarrow \int_{M_+} f^2 v_g = \sum_{k=0}^{r} \int_{M_k} f^2 v_g = \sum_{k=0}^{r} \int_{I_k \times L_k} t\, v_g$$

$$= \sum_{k=0}^{r} \int_{I_k \times L_k} t\, (\alpha^* dr) \wedge (\alpha^* \omega)$$

$$= \sum_{k=0}^{r} \int_{I_k} \left( \int_{L_k} \frac{t \cdot \alpha^* \omega}{|df^2|} \right) dt \qquad \alpha^* dr = \frac{\pi_1^* dt}{|df^2|}$$

$$= -\sum_{k=0}^{r} \int_{I_k} t \frac{d}{dt} V(t)\,dt$$

$$= \int_0^{f_{max}^2} V(t)\,dt$$